22.03 loeng

9. DIMENSIONAALANALÜÜS

Def. Dimensionaalanalüüs on füüsikaliste suuruste vahelise seose leidmise meetod, mis põhineb nende suuruste dimensioonidel

vt. ENE

Võimaldab:

1. Suurte (looduslike) süsteemide analüüs mudeli põhjal
2. Sarnasuskriteeriumid
3. Võrrandite kontroll
4. Oluliste füüsikaliste mõistete kataloog

Kirjandus:

H.L.Langhaar	Dimensional Analysis and Theory of Models. Wiley, New York et al.
Г.И.Баренблатт	Подобие, автомодельность и промежуточная асимптотика. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1982
G.Barenblatt	ibid, inglise keeles (2 trükki) 1996, 2003

Def. Võrrand dimensionaalselt homogeenne, kui tema vorm ei sõltu põhimõõtühikutest (põhidimensioonidest)

Näide:

Pendli periood $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

L – pikkus, g – raskuskiirendus

$g = 9.8\,{}^{m}/_{s^2}$

$g = 32{,}2\,{}^{jalga}/_{s^2}$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{9.8}}\sqrt{L} = 2.00\sqrt{L}$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{32{,}2}}\sqrt{L} = 1{,}11\sqrt{L}$

Def. Dimensioonita suuruste hulk on täielik, kui iga suurus selles hulgas on sõltumatu ja iga teine mõõduta suurus antud muutujatest on esitatav hulka kuuluvate suuruste kaudu

Näide:

hüdrodünaamika muutujad

F – jõud
L – pikkus
V – kiirus
ρ – tihedus
μ – viskoosus

g – gravitatsioonikiirendus
c – heli kiirus
σ – pindpinevus

Dimensioonita suurused:

Reynoldsi arv $Re = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\upsilon}$ $\left(\upsilon = \frac{\mu}{\rho}\right)$

Survetegur $P = \frac{F}{\rho V^2 L^2} = \frac{p}{\rho V^2}$ $(p - \text{surve})$

Froude'i arv $Fr = \frac{V^2}{Lg}$

Mach'i arv $M = \frac{V}{c}$

Weberi arv $W = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$

Iga mõõduta suurus hüdrodünaamikas on esitatav

$$(Re)^{\alpha_1}\cdot(P)^{\alpha_2}\cdot(Fr)^{\alpha_3}\cdot(M)^{\alpha_4}\cdot(W)^{\alpha_5}$$

Põhiteoreem (aastast 1914)

(Buckinghami teoreem, **π** - teoreem)

Kui võrrand (funktsionaalne sõltuvus) on dimensionaalselt homogeenne, siis on võimalik teda redutseerida ainult täielikku dimensioonita suuruste hulka sisaldavaks võrrandiks (funktsionaalseks sõltuvuseks).

Teine sõnastus:

Eksisteerigu füüsikaline seaduspärasus mõõduga muutuja funktsiooni kujul sõltuvana teistest mõõduga muutujatest. See seaduspärasus on esitatav mõõduta muutuja funktsioonina, mis sõltub teiste mõõduta muutujate kombinatsioonidest. Nende kombinatsioonide arv on üldisest mõõduga muutujate arvust väiksem mõõduga sõltumatute põhimuutujate arvu võrra.

Olgu suurus a määratav

$$a = f\left(\underbrace{a_1, \dots, a_K,}_{\text{sõltumatud}} \quad \underbrace{a_{K+1}, \dots, a_n}_{\text{sõltuvad}} \right)$$

Sõltuvate dimensioonid

$$[a_{k+1}] = [a_1]^{p_{k+1}} \dots [a_k]^{r_{k-1}}$$

$$\dots$$

$$[a_n] = [a_1]^{p_n} \dots [a_k]^{r_n}$$

Suurus a ise

$$[a] = [a_1]^p \dots [a_k]^r$$

Leiame suhted

$$\pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k-1}} \dots a_k^{r_{k-1}}}, \dots, \qquad \pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{p_n} \dots a_k^{r_n}}$$

$$\pi = \frac{a}{a_1^{p} \dots a_k^{r}}$$

Need on ilmselt mõõduta suurused.

Teisendame $a = f(\dots)$

$$\frac{a}{a_1^p \dots a_k^r} = \pi = \frac{1}{a_1^p \dots a_k^r} f\left[a_1, \dots, a_k, \pi_1 \cdot (a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}), \dots \right.$$
$$\left. \dots \pi_{n-k} \cdot (a_1^{p_n} \dots a_k^{r_n}) \right]$$
$$= F(a_1, \dots, a_k, \pi_1, \dots, \pi_{n-k})$$

st. f märgib funktionaalset sõltuvust siit järgneb, et

$$a = f(a_1, \dots, a_n) = a_1^p \dots a_k^r \, \Phi(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$$

Analüüs

Hüdrodünaamika

$$V, \; L, \; F, \; \rho, \; \mu, \; g$$

	V	L	F	ρ	μ	g
M	0	0	1	1	1	0
L	1	1	1	-3	-1	1
T	-1	0	-2	0	-1	-2

ükskõik milline suurus π

$$\pi = V^{k_1} L^{k_2} F^{k_3} \rho^{k_4} \mu^{k_5} g^{k_6}$$

$$[\pi] = [LT^{-1}]^{k_1} [L]^{k_2} [MLT^{-2}]^{k_3} [ML^{-3}]^{k_4} [ML^{-1}T^{-1}]^{k_5} [LT^{-2}]^{k_6}$$

$$[\pi] = \left[M^{k_3+k_4+k_5} \cdot L^{k_1+k_2+k_3-3k_4-k_5+k_6} \cdot T^{-k_1-2k_3-k_5-2k_6}\right]$$

$$k_3 + k_4 + k_5 = 0$$

$$k_1 + k_2 + k_3 - 3k_4 - k_5 + k_6 = 0$$

$$-k_1 - 2k_3 - k_5 - 2k_6 = 0$$

3 võrrandit → 6 tundmatut!

$$k_1 = -2; \; k_2 = -2; \; k_3 = 1$$

$$\to k_4 = -1, \; k_5 = 0, \; k_6 = 0 \to \frac{F}{\rho V^2 L^2} = P \quad \text{survetegur}$$

$$k_1 = 1, \; k_2 = 1, \; k_3 = 0$$

$$\to k_4 = 1, \; k_5 = -1, \; k_6 = 0 \to \frac{V L \rho}{\mu} = Re \quad \text{Reynoldsi arv}$$

$$k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 0$$

$$\to k_4 = 0, \; k_5 = 0, \; k_6 = -1 \to \frac{V^2}{Lg} = Fr \quad \text{Froude'i arv}$$

Meelevaldne valik!

$$k_1 = 10, \quad k_2 = -5, \quad k_3 = 8$$

$$\to k_4 = 8, \quad k_5 = -16, \quad k_6 = 5$$

$$\pi = V^{10} L^{-5} F^8 \rho^8 \mu^{-16} g^{-5}$$

$$\pi = (P)^8 \cdot (Re)^{16} \cdot (Fr)^5 !$$

Sarnasuskriteeriumid

Geomeetria mõiste – homoloogsus = sarnasus

homoloogsed punktid – 1:1 vastavus

homoloogsed kujundid

homoloogsed ajad

Üldised mõisted

Olgu meil prototüüp x, y, z, t

mudel x', y', z', t'

Homoloogsed punktid ja ajad on seotud

$$x' = K_x x, \quad y' = K_y y, \quad z' = K_z z, \quad t' = K_t t$$

$K_z \; K_x \; K_y$ skaleerimistegurid, K_t – ajategur

geomeetriliselt sarnane mudel $K_x = K_y = K_z = K_L$

kui $K_x = K_y \neq K_z$ näiteks

siis $\dfrac{K_z}{K_x}$ – moonutustegur

Def. Funktsioon $f'(x', y', z', t)$ on sarnane funktsioonile $f(x, y, z, t)$ kui suhe f'/f on konstantne kõigi homoloogiliste punktide ja aegade korral. Tegur $K_f = f'/f$ on muutumistegur.

Kinemaatiline sarnasus

Kahe süsteemi liikumine on sarnane kui homoloogsed osakesed (punktmassid) on homoloogsetes ruumipunktides homoloogsetel aegadel.

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

$$u' = \frac{dx'}{dt'}, \qquad v' = \frac{dy'}{dt'}, \qquad w' = \frac{dz'}{dt'}$$

$$u' = \frac{K_x}{K_t} u, \qquad v' = \frac{K_y}{K_t} v, \qquad w' = \frac{K_z}{K_t} w$$

Geomeetriliselt sarnased

$$K_x = K_y = K_z = K_L$$

s. t. $\frac{K_L}{K_t} = K_v$ - kiiruse tegur

Kiirendus

$$a'_x = \frac{K_x}{K_t^2} a_x, \qquad a'_y = \frac{K_y}{K_t^2} a_y, \qquad a'_z = \frac{K_z}{K_t^2} a_z$$

Dünaamiline sarnasus

Kaks süsteemi on dünaamiliselt sarnased, kui nende homoloogilistele osadele mõjuvad samad jõud.

Olgu meil $m, \ m'$

$$m' = K_m m$$

Newton'i seadus

$$F'_x = m' a'_x \qquad F'_y = m' a'_y \qquad F'_z = m' a'_z$$

$$\frac{F'_x}{F_x} = \frac{K_m K_x}{K_t^2}, \qquad \frac{F'_y}{F_y} = \frac{K_m K_y}{K_t^2}, \qquad \frac{F'_z}{F_z} = \frac{K_m K_z}{K_t^2},$$

geomeetriliselt sarnaste süsteemide puhul

$$K_F = \frac{K_m K_L}{K_t^2}$$

Näide: Mootor: mudel 1:10 mõõdetelt, 1:3 pöörete arv

$$K_L = \frac{1}{10}, \qquad K_t = 1/3$$

$$K_v = \frac{K_L}{K_t} = \frac{1/10}{1/3} = 3/10, \qquad K_a = 9/10$$

materjal sama

$$K_m = K_L{}^3 = \frac{1}{1000} \qquad K_F = \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10}}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{10000}$$

Staatika, elastne deformatsioon, talad, konsoolid, vardad, ...

L	– pikkus	E	– elastusmoodul
F	– jõud	ν	– Poisson'i tegur
M	– moment		

$$\sigma = \sigma(F,\ M,\ L,\ E,\ \nu) \qquad \text{pinge}$$
$$u = u(F,\ M,\ L,\ E,\ \nu) \qquad \text{siire}$$

Dimensionaalanalüüs

$$\sigma = \frac{F}{L^2} f_1\left(\frac{F}{EL^2},\ \frac{M}{FL},\ \nu\right) \qquad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$u = \frac{F}{EL} f_2 \underbrace{\left(\frac{F}{EL^2},\ \frac{M}{FL},\ \nu\right)}_{\text{mõõduta}} \qquad [m]$$

$$\overbrace{K_F = K_E K_L{}^2,\ \ K_M = K_F K_L,\ K_\nu = 1}^{\text{Sarnasuste gurid}}$$

$$K_\sigma = \frac{K_F}{K_L{}^2} = \frac{K_E K_L{}^2}{K_L{}^2} = K_E$$

$$K_u = \frac{K_F}{K_E K_L} = \frac{K_E K_L{}^2}{K_E K_L} = K_L$$

Kui konstruktsiooni lineaarsed mõõted muutuvad k korda, siis: rakendatud jõud muutuvad k^2 korda, rakendatud momendid k^3 korda, siirded k korda, pinged jäävad muutmatuks.

Hüdrodünaamika

1. Kokkusurumatu vedelik

$u,\ v,\ w$ - kiiruse komponendid

$$u = V f_1(Re)$$
$$v = V f_2(Re) \qquad Re \ - \ \text{Reynoldsi arv}$$
$$w = V f_3(Re) \qquad V \ - \ \text{keskmine kiirus}$$

Seega mudelil

$$u' = V' f_1(Re)$$
$$v' = V' f_2(Re)$$
$$w' = V' f_3(Re)$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w} = \frac{V'}{V} = K_v$$

Kokkusurumatu vedeliku korral on kaks voolamist kinemaatiliselt sarnased kui geomeetriliselt ja kinemaatiliselt sarnaste ääretingimuste korral on Reynoldsi arv vooludel ühesugune.

2. Voolamine vaba pinnaga

$$u = V f_1(Re,\ Fr,\ W)$$
$$v = V f_2(Re,\ Fr,\ W)$$
$$w = V f_3(Re,\ Fr,\ W)$$

Re – Reynoldsi arv

Fr – Froude'i arv

W – Weberi arv

KOKKUVÕTE

Dimensionaalanalüüs

1. Vähendab oluliselt uuritavate muutujate arvu, st. iga mitmest füüsikalisest muutujast moodustatud mõõduta/dimensioonita grupp võib olla käsitletud kui ühtne muutuja (parameeter, suurus). Väheneb katsete arv ning katsetulemuste korreleerimiseks ja interpreteerimiseks vajalik aeg.

2. Üksikute gruppi kuuluvate muutujate mõju võib määrata ühtse muutuja mõjuefektist $Re = \frac{VL\rho}{\mu}$ $\frac{\text{kiirus diam. tihedus}}{\text{viskoossus}}$

3. Tulemused ei sõltu süsteemi mõõtskaalast ja ühikutest.

4. Skaleerimine võimaldab muuta ja realiseerida sarnasustingimusi mudeli ja prototüübi (reaalsuse) vahel.

5. Mõõduta suuruste piirkonnad iseloomustavad füüsikalisi protsesse.

Näited mõõduta suurustest ja võrranditest

1. Reynoldsi arv

$$Re = \frac{LV}{\nu}$$

L – diameeter $[m]$

V – kiirus $\left[\frac{m}{s}\right]$

ν – viskoossus $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

Kontrollime:

$$\left[m \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{s}{m^2}\right] = [1]$$

2. Froude'i arv

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{Lg}}$$

V – kiirus $\left[\frac{m}{s}\right]$

L – pikkus $[m]$

g – raskuskiirendus $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

Kontrollime:

$$\left[\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{m \cdot \frac{m}{s^2}}}\right] = [1]$$

3. Liikumisvõrrandi mõõduta kuju

Impulsi jäävus seadusest

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

u – siire $[m]$

x – koordinaat $[m]$

t – aeg $[s]$

$\lambda + 2\mu$ – elastsusmoodul

ρ_0 – tihedus

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} = c_0^2, \quad c_0 \text{ – kiirus} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Kontrollime võrrandi:

$$c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ühikuid:

$$\left[\frac{m^2}{s^2}\right] \left[\frac{m}{m^2}\right], \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Mõlema liikme ühikuks on $\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

Tuletagem meelde Newtoni seadust!

Leiame võrrandi mõõduta kuju:

Mõõduta suurused

$$v = \frac{u}{u_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \xi = \frac{x}{x_0}$$

u_0, t_0, x_0 – mõõduga suurused

v, τ, ξ - neile vastavad mõõduta suurused

tuletised:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{t_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{x_0}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{x_0^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{\partial \tau} \frac{1}{t_0}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{t_0^2}$$

Asendame:

$$c_0^2 \frac{u_0}{x_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{u_0}{t_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0$$

Teisendame:

$$\frac{c_0^2\tau_0^2}{x_0^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2}=0$$

$$\frac{c_0^2\tau_0^2}{x_0^2}=k^2,\quad k^2:\left[\frac{m^2}{s^2}\ \frac{s^2}{m^2}\right]\quad - \text{ mõõduta}$$

Võrrandi mõõduta kuju

$$k^2\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2}=0$$

bold

4. Punktmassi liikumine

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+\mu\frac{du}{dt}+ku=0$$

u – siire $[m]$

t – aeg $[t]$

m – mass $[M]$

μ – viskoossus $\left[\frac{M}{s}\right]$

k – jäikuskonstant $\left[\frac{M}{s^2}\right]$

Kontrollime dimensioone

$$\left[M\cdot\frac{m}{s^2}\right],\qquad \left[\frac{M}{s}\cdot\frac{m}{s}\right],\qquad \left[\frac{M}{s^2}m\right]$$

Mõõduta suurused

$$v=\frac{u}{u_0},\quad \tau=\frac{t}{t_0},\quad u_0,\quad t_0\ -\ \text{mõõduga}$$

Tuletised:

$$\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\tau}\frac{1}{t_0},\qquad \frac{d^2}{dt^2}=\frac{d^2}{d\tau^2}\frac{1}{t_0^2}$$

Asendame

$$m\frac{u_0}{t_0^2}\frac{d^2v}{d\tau^2}+\mu\frac{u_0}{t_0}\frac{dv}{d\tau}+ku_0v=0$$

Teisendame

$$\frac{d^2v}{d\tau^2}+\frac{\mu t_0}{m}\frac{dv}{d\tau}+\frac{kt_0^2}{m}v\ =\ 0$$

$$\frac{\mu t_0}{m}:\ \left[\frac{M}{s}\ \frac{s}{M}\right]=[1],\qquad \frac{kt_0^2}{m}:\ \left[\frac{M}{s^2}\ \frac{s^2}{M}\right]=[1]$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2}+\mu^*\frac{dv}{\partial\tau}+k^*v\ =\ 0$$

μ^*, k^* - mõõduta

Table 1. Dimensional formulas of common quantities

Quantity	Definition	Dimensional formula
Mass	Fundamental	M
Length	Fundamental	L
Time	Fundamental	T
Velocity	Distance/time	LT^{-1}
Acceleration	Velocity/time	LT^{-2}
Force	Mass × acceleration	MLT^{-2}
Momentum	Mass × velocity	MLT^{-1}
Energy	Force × distance	ML^2T^{-2}
Angle	Arc/radius	[illegible]
Angular velocity	Angle/time	T^{-1}
Angular acceleration	Angular velocity/time	T^{-2}
Torque	Force × lever arm	ML^2T^{-2}
Angular momentum	Momentum × lever arm	ML^2T^{-1}
Moment of inertia	Mass × radius squared	ML^2
Area	Length squared	L^2
Volume	Length cubed	L^3
Density	Mass/volume	ML^{-3}
Pressure	Force/area	$ML^{-1}T^{-2}$
Action	Energy × time	ML^2T^{-1}
Viscosity	Force per unit area per unit velocity gradient	$ML^{-1}T^{-1}$

McGraw-Hill
Encyclopedia of Science & Technology

Alphabetical list of named groups

Name	Symbol	Definition*	Significance
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Journal of Sound and Vibration (1998) 217(4), 653–664
Article No. sv981763

OPTIMAL DYNAMIC ABSORBER FOR A ROTATING RAYLEIGH BEAM

Marko Jorkama
Valmet Winders, Wärtsilänkatu 100, FIN-04400 Järvenpää, Finland
and
Raimo von Hertzen,
Laboratory of Theoretical and Applied Mechanics,
Helsinki University of Technology, P.O. Box 1100, FIN-02015 HUT, Finland

(Received 21 November 1997, and in final form 24 March 1998)

A theory of dynamic vibration absorbers for an elastically mounted rotating Rayleigh beam under a distributed load is presented. The novel features due to rotational motion are demonstrated via a numerical example of a paper machine roll with dynamic absorbers attached to the bearing houses. Depending on the horizontal to vertical bearing stiffness ratio, the optimal frequency response function may exhibit three peaks of equal height instead of the conventional two. It is also shown that the optimal values for absorber stiffness and damping depend significantly on the rotational speed of the beam and asymmetry of the bearing support. Finally, the effectiveness of the optimal absorber is analysed as a function of the absorber size and rotational speed.

2. THEORY

The equations of motion of a uniform rotating Rayleigh beam (see Figure 1) can be written in the inertial co-ordinates as

$$\rho A\ddot{u}-\rho I\ddot{u}''-2\rho I\Omega\dot{v}''+C_i(\dot{u}+\Omega v)+EIu''''=f_1 \quad (1)$$

$$\rho A\ddot{v}-\rho I\ddot{v}''+2\rho I\Omega\dot{u}''+C_i(\dot{v}-\Omega u)+EIv''''=f_2 \quad (2)$$

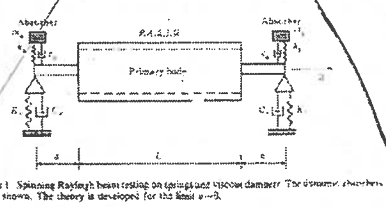


Figure 1. Spinning Rayleigh beam resting on springs and viscous dampers. The dynamic absorbers are also shown. The theory is developed for the limit $a\to 0$.

10. DETERMINEERITUS

$\left.\begin{array}{l}\text{füüs.}\\ \text{biol.}\\ \text{sots.}\end{array}\right\}$ protsess → matemaatiline mudel → lahendamine

- kas on lahendamine üldse võimalik?
- kas lahend on determineeritud (määratud)
  - üldse
  - mingis piirkonnas

juhuslikud suurused (algandmed, parameetrid ...) → juhuslik protsess (jaotusseadus)

Tänapäevane arusaam:

matemaatiline mudel on
- determineeritud:
  - sisaldab kindla hulga liikmed;
  - kõik numbrilised tegurid ja parameetrid on määratud;
  - algandmed on fikseeritud;
- <u>mittelineaarne</u>

↓

Protsess võib mitte olla ennustatav!
mittedetermineeritud
unpredictable

Lahendatavus

Probleem: Olgu

$$u = f(x,y,z)$$
$$v = g(x,y,z)$$
$$w = h(x,y,z)$$

f, g, h - pidevad, diferentseeruvad

vaja leida

$$x = F(u,v,w)$$
$$y = G(u,v,w)$$
$$z = H(u,v,w)$$

Teoreem: Kui u, v, w, on argumentide x, y, z pidevad ja diferentseeruvad funktsioonid ja punktis x_0, y_0, z_0 on nende väärtuseks u_0, v_0, w_0 ning jakobiaan

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix}$$

on nullist erinev ($\neq 0$), siis eksisteerivad ja on üheselt määratud punkti x_0, y_0, z_0 ümbruses niisugused ühesed, pidevad ja diferentseeruvad funktsioonid $F(u,v,w)$, $G(u,v,w)$ ja $H(u,v,w)$, et võrrandsüsteemid

$$\begin{array}{lcl} u = f(x,y,z) & & x = F(u,v,w) \\ v = g(x,y,z) & \text{ja} & y = G(u,v,w) \\ w = h(x,y,z) & & z = H(u,v,w) \end{array}$$

on samaväärsed, St. F, G, H on operaatori f, g, h pöördoperaator

Seega:

Objekti väljundsuurustest kõlbavad pöördülesande lahendamiseks ainult niisugused u, v, ja w, mille puhul jakobiaan

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} \neq 0$$

Kui see jakobiaan on ühes punktis 0, siis ei ole pöördülesanne üldse lahenduv või ei ole x, y, z üheselt määratavad u, v, ja w alusel

Vrdl - lineaarvõrrandisüsteemide lahenduvus

NB! Teoreem on lokaalne ja kehtib lineaarsete seoste puhul. Mittelineaarsete f, g ja h puhul võib eksisteerida mitu lahendit.

Vt. I. Petersen, Pöördülesannete olemus
Küb. Inst. Uuringuaruanne Math 45/92.

Kausaalsuse printsiip (põhjus ja tagajärg)

Sündmuste rida on põhjuslikkuse ahel, kas alati?
ajaline järgnevus $\neq$ põhjuslikkuse ahel

Laplace (1749 – 1827):

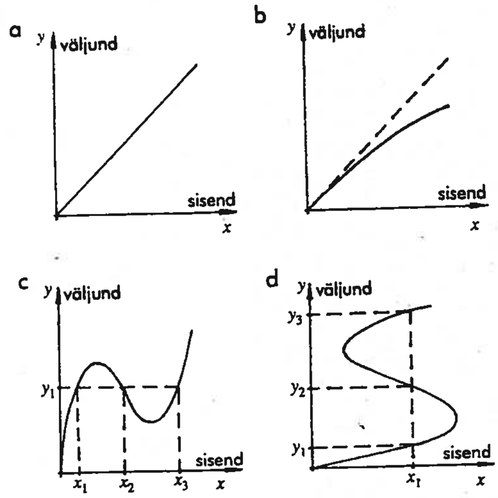
> Kõigi universumi osakeste koordinaatide ja impulsside väärtused antud ajahetkel määravad täiesti üheselt universumi oleku mistahes ajahetkel minevikus või olevikus

Heisenbergi määramatuse printsiip

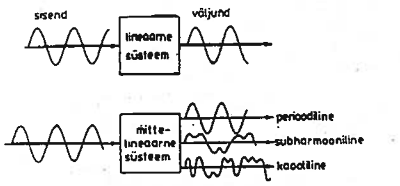
Kaose paradigma

If *the world*
— were deterministic and
— consisted exclusively of (interacting) particles,
if Newton's Law of Motion, m · b = K, were valid without restriction,
if *we knew*
— all laws of nature, in particular all laws of force, and
— all boundary and initial conditions at a definite point in time (i. e., if Newton's laws apply, the positions and velocities of all particles)
— with absolute accuracy, and
if *we could*
— store all these data,
— process them mathematically,
— and solve all relevant equations
— with sufficient speed,
then not only would the course of *the world* be
— unambiguously determined (equal causes have equal effects)
— in every detail,
but then could *we* (or at least Laplace's demon, or a gigantic supercomputer) also
— calculate and determine all events
— past and future.

Table 2: Preconditions and consequences of classical determinism.



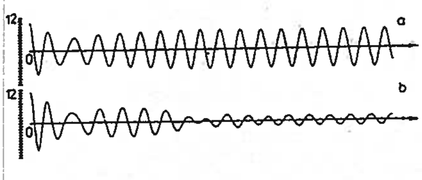
Sisendid ja väljundid lineaarsete ja mittelineaarsete funktsioonide puhul.



Lineaarse ja mittelineaarse süsteemi väljundite erinevus.
Moon, 1987.

Duffingi võrrand

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = f\cos\omega t$$



Mittelineaarse sumbuva sundvõnkumise graafik:
(a) $x_{01} = A$, $\dot{x}_{01} = 0$;
(b) $x_{02} = B$, $\dot{x}_{02} = 0$, $A < B$; väiksem algamplituud tekitab suurema amplituudiga võnkumise.
Thompson, Stewart, 1986.

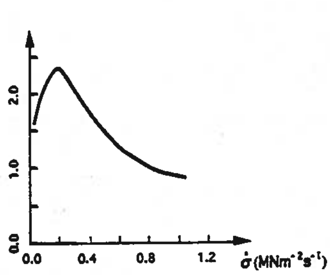


Figure 2. Crushing stress of ice as a function of ice stress rate /11/.

Approximation:

$$\sigma_c = \alpha_j + \beta_j \dot{\sigma} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

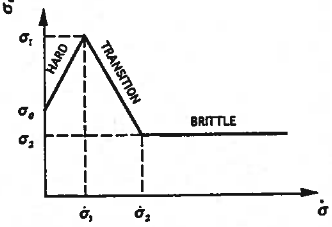


Figure 3. Piece-wise linear approximation of the ice crushing stress.

ALGIDEED

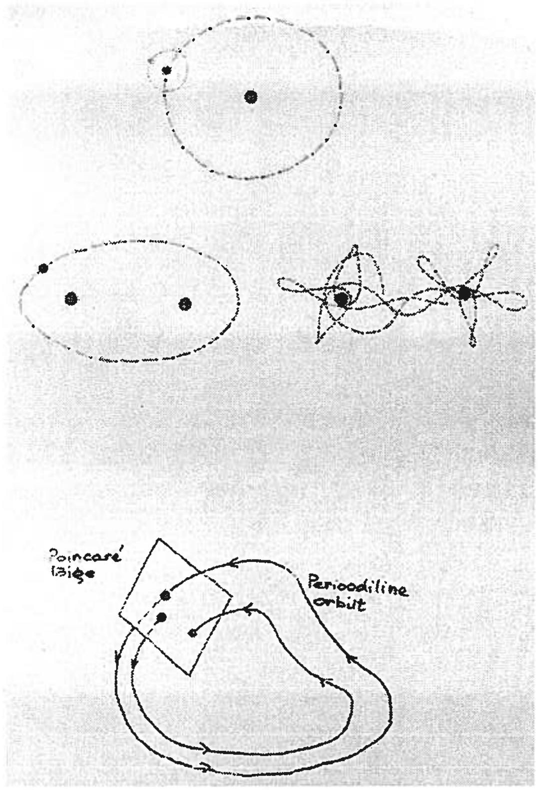
Maxwell 1873

Hadamard 1989

Poincaré 1908

- **kolme keha probleem**
- **"... võib juhtuda, et väikesed erinevused algolukorra kirjeldamisel põhjustavad suuri muutusi vaadeldavas nähtuses."**

Weierstrassi funktsioonid



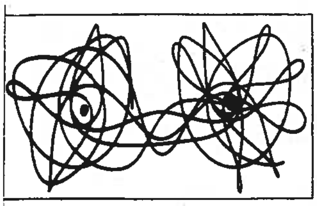


Illustration du mouvement d'un corps attiré par deux masses identiques. Les forces régies par des équations simples, donnent des mouvements d'une extrême complexité.

Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit».

C'est la «sensibilité aux conditions initiales» qui engendre des effets «chaotiques» dans des systèmes déterministes régis par des équations différentielles. Poincaré l'avait découvert à ses dépens, c'est le cas de le dire, si l'on se souvient des coûts de réimpression de son mémoire lauréat, qu'il remboursa à Mittag-Leffler.

Les résultats présentés dans ce mémoire seront approfondis et complétés dans les trois volumes des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (1892-1899) et, par la suite, dans les *Leçons de Mécanique céleste* parues en quatre volumes entre 1905 et 1911.

ARVUDE JADA

mõõdetud, arvutatud

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots$

1, 2, 3, 4, ... $\qquad x_{n+1} = x_n + 1$

2, 4, 6, 8, ... $\qquad x_{n+1} = x_n + 2$

$x_{n+1} = f(x_n)$

$f(x_n)$ **- mittelineaarne funktsioon**

$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$

λ **- konstant**

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n (1 - x_n)$$

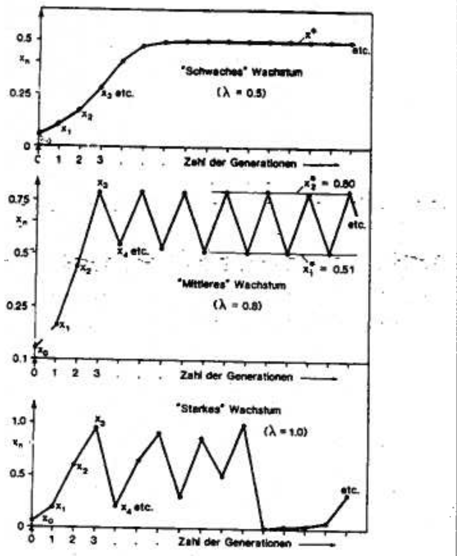
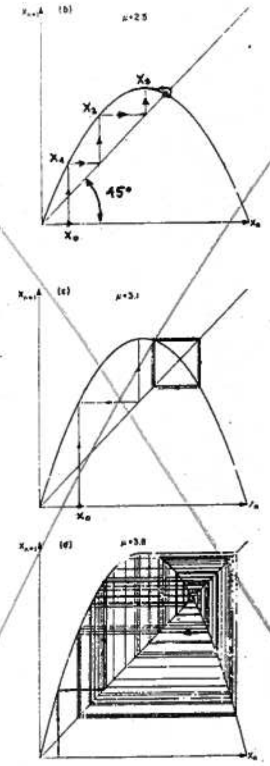
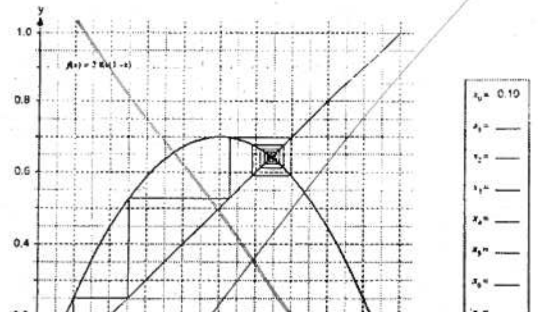


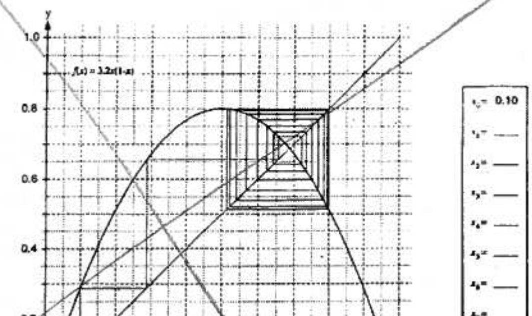
Abbildung 2.1: Das Iterationsschema der Verhulst-Dynamik bei verschiedenen Werten des Wachstumsparameters λ: Schwaches Wachstum ($\lambda = 0.5$) mit einem Attraktor, mittleres Wachstum ($\lambda = 0.8$) mit 2 Attraktoren und starkes Wachstum ($\lambda = 1$) mit chaotischem Verhalten der Populationen

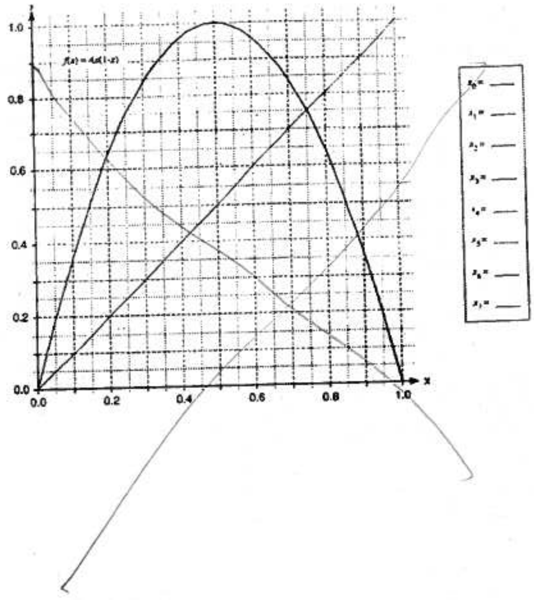
$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ logistic map

logistilina kujutis



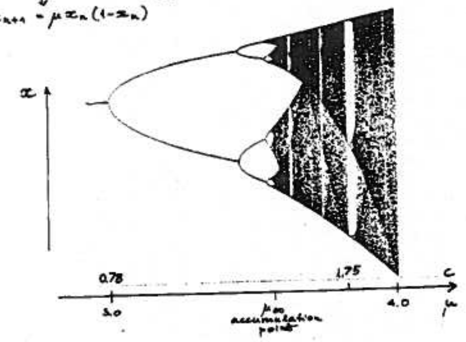


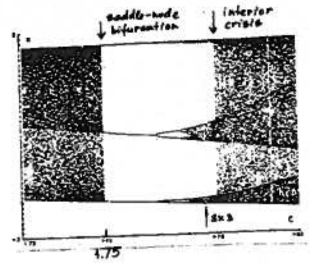




Bifurkatsiooni diagramm

$$x_{n+1} = c - x_n^2$$
$$\updownarrow$$
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$





Sarkovski:

$3 \to 5 \to 7 \to 9 \to \ldots \to 2\times3 \to 2\times5 \to 2\times7 \to 2\times9 \to \ldots$
$\to 2^n\times3 \to 2^n\times5 \to 2^n\times7 \to \ldots \to 2^n \to \ldots \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

$$X_{n+1} = f(x_n)$$
$$f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

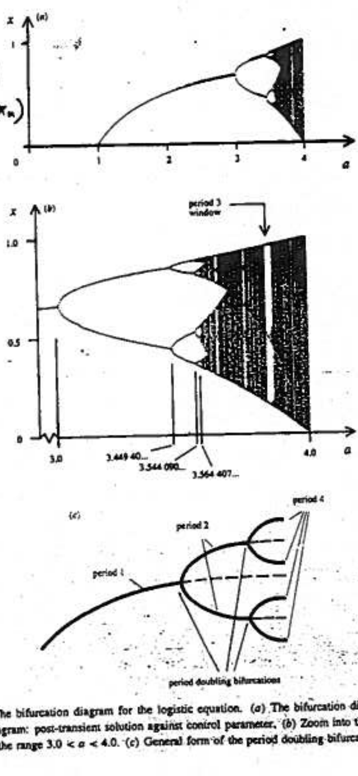
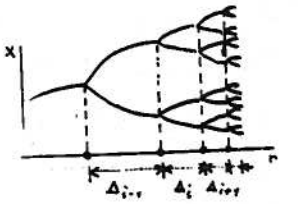
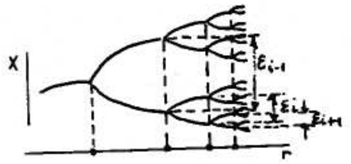


Figure 5.4. The bifurcation diagram for the logistic equation. (*a*) The bifurcation diagram for the logistic diagram: post-transient solution against control parameter. (*b*) Zoom into the logistic diagram over the range 3.0 < *a* < 4.0. (*c*) General form of the period doubling bifurcations.





$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \frac{r_i - r_{i+1}}{r_{i+1} - r_{i+2}}$$

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1}}$$

$i \to \infty$

$$\delta_i \to \delta = 4.6692016091\ldots$$
$$\alpha_i \to \alpha = 2.5029078750\ldots$$